パスカルの三角形によるパターン・デザイン

Pattern Design by Pascal's Triangle

古藤　浩

KOTOH Hiroshi

This paper focuses on Pascal's Triangle consisting of binomial coefficients. Uarious color patterns that develop by coloring coefficients of Pascal's Triangle are discussed. These color patterns are very complex and have fractal structure. In a further extension of this notion, Pascal's Pyramid is defined by trinomial coefficients. Resulting complex and fractal structure patterns from cross-sections of the Pyramid are then shown. An infinite number of patterns from Pascal's Triangle and Pascal's Pyramid can be derived. The process of pattern derivation is made simple by the use of computers. This study concludes that the use of Pascal's Triangle in pattern design and development shows great promise.

1．はじめに

本論文では二項係数によって構成されるパスカルの三角形に注目する。そして単純な規則によって各係数に色を割り付けると現れるパターンを議論する。更にパスカルの三角形を拡張した〝パスカルの角錐〟を定義し、その断面に現れるパターンも議論する。

パスカルの三角形の各係数で、奇数だけに色を付けると〝シルピンスキーのギャスケット〟と呼ばれる図4のフラクタル図形（自己相似図形）が現れる。フラクタル科学について述べた本ならばどの本にもこの事実は書いてあるが、数の偶奇だけでなく他の数で割った余りによる色付けの結果など、踏み込んで議論した文献はあまり無い。また、パスカルの三角形を含んだ考え方として〝セル・オートマトン（自動人形と訳される)〟が研究されているが、その中でも様々なパターンが現れる。そこで本研究ではパスカルの三角形によるパターン、パスカルの三角形と似た規則によるセル・オートマトンによるパターン、パスカルの三角形を３次元に拡張した図形（パスカルの角錐）によるパターン、更にその拡張によるパターンについて議論する。

本研究で提示するパターンは全てフラクタル性を持ち複雑である。しかし、その支配法則は非常に単純であり、コンピュータの利用で簡単に、かつ無数のパターンを得ることができる。本研究の目的はパスカルの三角形を基本として得るパターンの無限の可能性を示す

ことにある。

2．パスカルの三角形

⑴パスカルの三角形によるパターンの基本的構造

パスカルの三角形はＭ個のものからＮ個選び出す組み合わせの数を図１のように規則正しく並べることによって定義される。図１で一番上を０段め、一番左を０列目と呼ぶと、上からＭ段目左からＮ列目の数値にはＭ個のものからＮ個選び出す組み合わせの数が対応する（左からＮ〝個〟目とすべきかもしれないが４章の議論のため〝列〟と呼ぶ)。すなわち最上段が０個のものから０個選び出す数(１)、第２段が１個から０個選ぶ組み合わせ数と、１個選ぶ組み合わせ数(共に１)、第３段が２個から０、１、２個選ぶ組み合わせ数（1，2，1）を表している。

これら組み合わせ数は二項係数と呼ばれ、上からＭ段目左からＮ列目は（１＋x）Ｍの x^N の係数を表す。数式で表すならば、M段N列はM! / (M-N)! N!（N＝０, …, M）となり、各係数は図２のように表示できる。明らかにこの係数は左右対称となる。

しかし各係数の計算にいちいち階乗の計算をする必要はない。図１を注意深く見ればすぐわかるように各係数はその上の段のもっとも近い二つの数の和で与えられる。これは組み合わせ数に

[Ｍ個からＮ個とる組み合わせ数]
＝[M－１個からＮ個とる組み合わせ数
(Ｍ個目を選ばない場合)]
＋[M－１個からN－１個とる組み合わせ数
(Ｍ個目を必ず選ぶ場合)]

という性質があるからなのだが、これさえわかれば７、８段程度は簡単に計算できる。

さてパスカルの三角形の各係数で奇数だけに色を塗ってみよう。すると図３のようになり、大小の穴あき構造が現われる。これを拡げて第150段まで行ったものが図４である。大小の三角形が繰り返される入れ子構造になっているのがわかる。この色塗りを無限に行った図形は、三角形の中央から辺長1/2の三角形を次々と無限に繰り返して抜き取っていった時にできる図形と一致する。このように部分と全体が同じ構造はフラクタルと呼ばれ、図４はシルピンスキーのギャスケットと名付けられているフラクタル図形の一種である。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
⋮

図１ パスカルの三角形

$\frac{0!}{0!0!}$

$\frac{1!}{1!0!}$ $\frac{1!}{0!1!}$

$\frac{2!}{2!0!}$ $\frac{2!}{1!1!}$ $\frac{2!}{0!2!}$

$\frac{3!}{3!0!}$ $\frac{3!}{2!1!}$ $\frac{3!}{1!2!}$ $\frac{3!}{0!3!}$

$\frac{4!}{4!0!}$ $\frac{4!}{3!1!}$ $\frac{4!}{2!2!}$ $\frac{4!}{1!3!}$ $\frac{4!}{0!4!}$

⋮

図２ 二項係数による表示

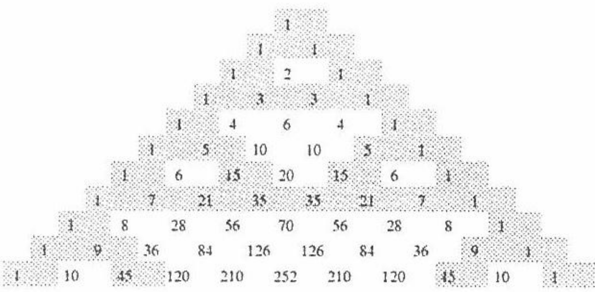


図３ パスカルの三角形の奇数に色を付ける

この図を支配している法則は、[偶数]＋[偶数]＝[偶数]、[奇数]＋[偶数]＝[奇数]、[奇数]＋[奇数]＝[偶数］だけであり、ある段に[奇数],[偶数],[偶数],…,[偶数],[偶数],[奇数]という状態ができれば、その下は偶数が両端から奇数に変わっていくため、偶数の逆三角形ができる。このことによって図４の空白の逆三角形ができることは容易に理解できるし、奇数が並べばその下は偶数の列になることも明らかである。このように図形の部分部分を見る限り意味は単純である。しかし、全体でみるとこのような入れ子関係が発生することは興味深い。

ところで奇数だけに色を塗るということを言い換えれば、２で割り切れない数だけに色を塗ることといえる。そこで、拡張として３で割り切れない数、５で割りきれない数、７で割りきれない数の位置に色を塗ったのが図５、図６、図７である。すると、元の三角形から半径が1/3、1/5、1/7の三角形をそれぞれ３、10、21個抜く作業を繰り返した図形を得たことがわかる。これら全ては奇数だけに彩色した場合の考え方の拡張とし

て理解できる。すなわち[偶数]＋[偶数]＝[偶数]に対応して[n で割りきれる数]＋[n で割りきれる数]＝[n で割りきれる数]が成立し……、というように支配する基本法則は同じなので、どの図でも逆三角形が現われる。なお、この作業を無限に大きなパスカルの三角形で行い一番外の三角形の面積を１とおいた場合、すなわち逆三角形の抜き取りを無限に繰り返した図形では、どれでも色を塗られた面積は０、周長は無限になる。これはフラクタル図形に特有な性質である。但し、このような入れ子関係は素数で割った場合にのみ発生する。

それでは合成数の場合はどうなるか。まず階乗数による場合を考えよう。図８は４で割りきれない数を塗った場合である。当然２で割り切れなければ４でも割り切れないので図４でも黒い位置は図８でも黒である。そして図４でのそれぞれの空白三角形の中央に更に三角形が入れ子状に入った形となる。この図形の意味も部分部分で考える限り単純である。すなわち図４での空白三角形は２で割りきれる数を表している。そこで、空白三角形の数値を更に２で割ることを考えると、商が奇数の場合、それは３で割り切れるが４で割り切れない数を示す。するとその彩色規則は図４と全く同じに考えることができる。つまり、図８で新たに現れた三角形は４で割り切れない偶数であり、その法則は図４の場合と基本的に同じとわかる。

図９は８で割り切れない数を塗った場合であり、図８での空白三角形が更に埋められる形となる。このような関係は他の数の階乗の場合でも同じように成立する。

それでは異なる素数の積を割った場合はどうなるか、図10（a）は６で割りきれない数を塗った結果である。この図は一見複雑に見えるが、原理から考えれば、６で割りきれない数とは、２または３で割り切れない数に等しい。そこで図10(b)のように２で割りきれない数だけ橙色に塗ると意味がはっきりする。

結局、任意の数をとり、それによって割り切れない数を塗って現れるパターン（以降では、この数を〝鍵となる数〟と呼ぶことにする）はこれらのパターンの合併として与えられることが、以上より理解できよう。

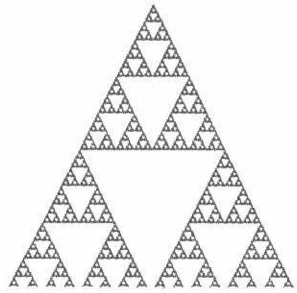


図４　２で割り切れない値

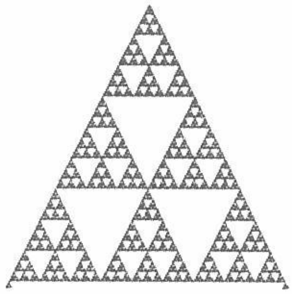


図５　３で割り切れない値

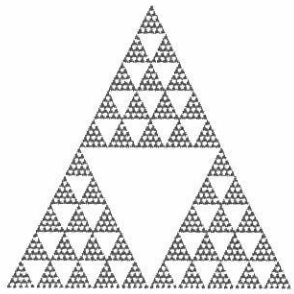


図６　５で割り切れない値

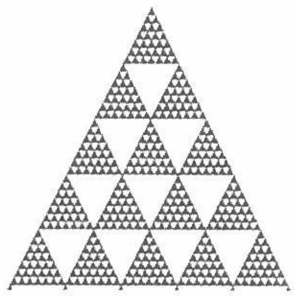


図７　７で割り切れない値

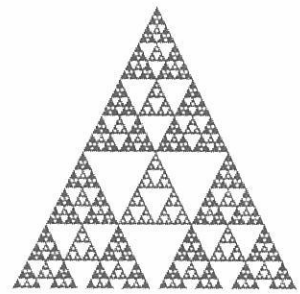


図８　４で割り切れない値

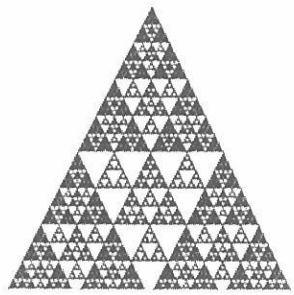


図９　８で割り切れない値

⑵パスカルの三角形の彩色

前節での議論によって、パスカルの三角形で鍵となる数で割り切れない数を塗ると様々なパターンを得ることがわかった。この節では図10(b)のように複数の色で彩色して得るパターンを考察する。ここでは彩色の規則として２種類の方法を提案する。

まず第一に提案するのはある数で割った剰りを更に第２の数で割り、その剰りの値によって様々に塗る方法である。よりプリミティブな方法として最初の数で割った剰りの値によって彩色する方法もあるが、それは第一の方法で第２の数を第１の数と一致させた場合に相当し、すなわち含まれている。以降ではこれを第一の彩色規則と呼ぶ。

図11は128で割りきれない値を更に4で割った剰りで520段まで彩色した例である。黒い部分は128では割れなかったが4に対しては剰り0の係数を示す。更に図12は14で割りきれない値を更に5で割った剰りで520段まで彩色した例である。

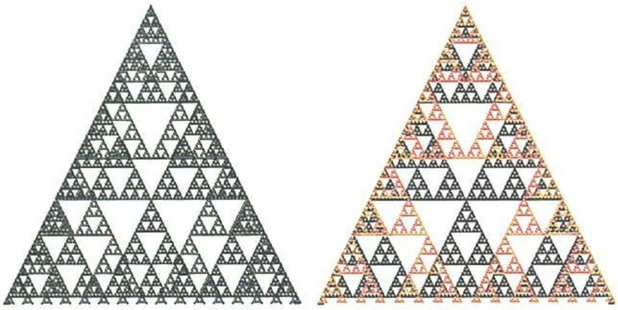


図10 (a) 6で割り切れない値　　(b) 奇数を橙色で彩色

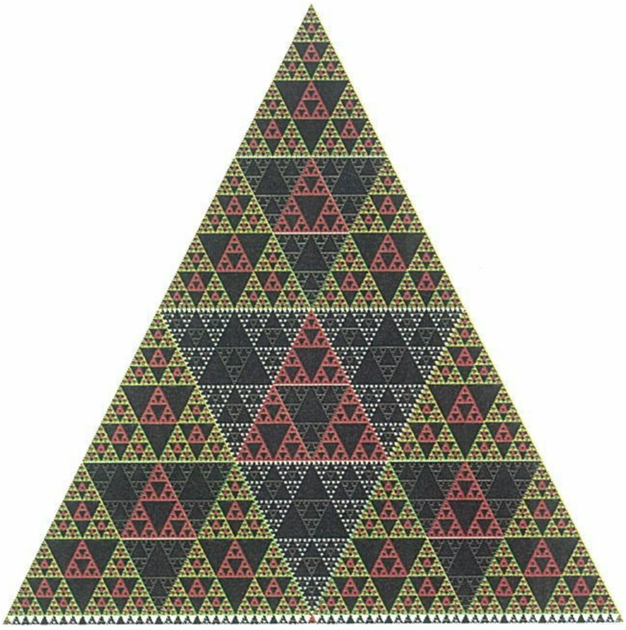


図11 128で割り切れない値（更に4で割った剰りにより彩色:0…　1…橙色　2…赤　3…緑）

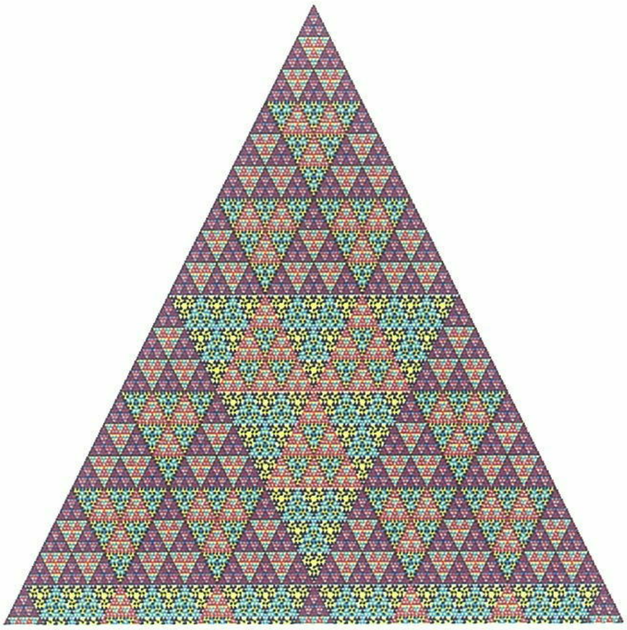


図13 数列 (243,81,27,9,3) で順に割り彩色する（下の数で割り切れず、その次の数で割り切れた場合の色:243…　81…黄　27…水色　9…赤　3…青）

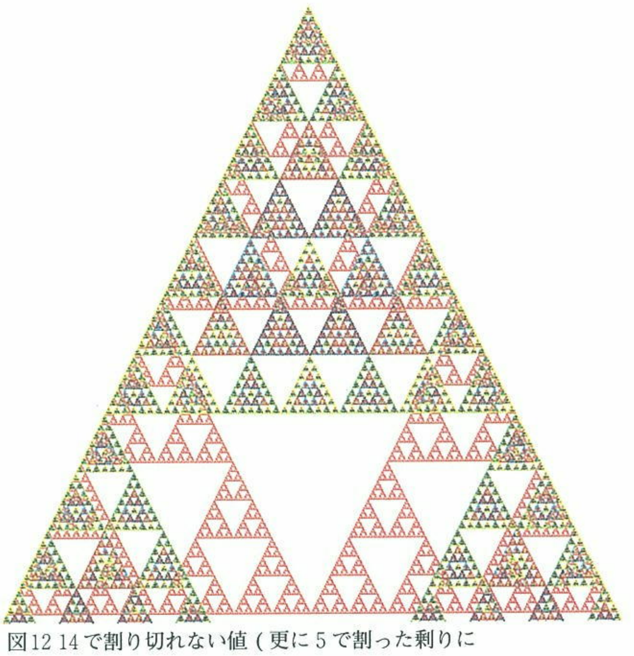


図12 14で割り切れない値（更に5で割った剰りにより彩色:0…青　1…黄　2…赤　3…緑　4…水色)

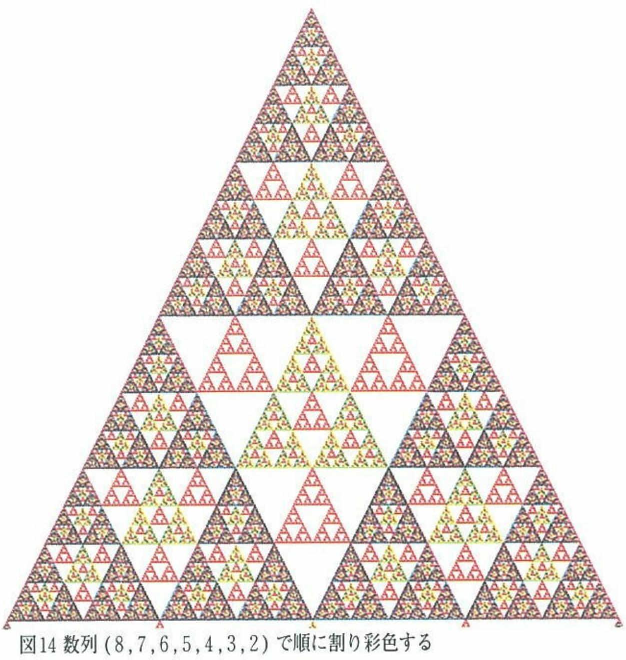


図14 数列 (8,7,6,5,4,3,2) で順に割り彩色する（下の数で割り切れず、その次の数で割り切れた場合の色:
8…　7…黄　6…水色　5…赤　4…青　3…緑　2…紫)

提案する第2の方法は使う色の数と等しい要素数の数列を準備する。最初の数で割り切れない係数の剰りを第2の数で割る。そして割り切れた数値のみある色で塗り、更にその剰りを第3の数で割る。以上を何度も繰り返すパターンである。この方法では後の数ほど小さくなくてはいけない。

数列の選び方に依存するが、この方法によればパスカルの三角形のフラクタル的な構造が色に関してもはっきり現れる。図13は第2の方法によって数列（243,81,27,9,3）、図14は数列（8,7,6,5,4,3,2）でそれぞれ520段まで彩色した例である。

以上までで明らかなように彩色パターンは設定した数に応じて無数に得ることができる。また、配色には重点を置かなかったが、色をうまく与えることによって十分美しいパターンを得ることができよう。

3．セル・オートマトン

ここではパスカルの三角形を含む広い概念であるセル・オートマトンについて説明し、パスカルの三角形を拡張して得るパターンについて簡単に述べる。セル・オートマトンとは時間と空間を離散化し、単純なモデルによって生命の増殖や結晶の成長傾向などを数値によって仮想的にシミュレーションする考え方をいう。

パスカルの三角形をセル・オートマトンの考え方で説明しよう。まず1個体の存在を初期状態とし、下方向を時間経過とする。そして前時刻での境界位置に新しい個体が発生し、その数は前時刻での境界の両側の個体数を足した数となるする。パスカルの三角形はこの法則に従い増殖した結果を表している。

図4で示した奇数か偶数の法則ならばより分かりやすく説明できる。[奇数]は存在を表し、[偶数]は死滅または空白を表すとする。すると[偶数]＋[偶数]＝[偶数］という法則は前時刻で何も存在しなければその後も何も存在しないこと、[奇数]＋[偶数]＝[奇数]は[奇数]の位置にあった存在が[偶数]の空き地へ進出したことを示す。さらに[奇数]＋[奇数]＝[偶数]は両側に存在した場合は過密が原因（例えば窒息）で死滅することを示す。すると図4は縦軸を時間とし、初期値として一つだけだったのが、この法則によって線上を増殖していく過程を表したものと認識できる。

時刻t,左からi番目の数値を $y^t(i)$ とおけば、パスカルの三角形の法則は

$$y^t(i)=y^{t-1}(i-1)+y^{t-1}(i+1)$$

と書ける。前章ではパスカルの三角形の数は段と段の間で互い違いに並んでいると考えたが、この式では数式化の便宜のため碁盤目状の枡目を考え、市松模様のように互い違いに値が入る形式で表現した。セル・オートマトンの考え方に基づけば、組み合わせ数にこだわらなくても、様々な法則で図形を得ることができる。例えば法則として、

$$y^t(i)=y^{t-1}(i-1)+y^{t-1}(i)+y^{t-1}(i+1)$$

を考え、ここで2で割り切れない数を黒くすれば図15になり、パスカルの三角形とは異なるタイプのパターンを得る。このように法則によって更に多様なパターンを得ることが可能である。

セル・オートマトンの研究は脳-神経系、自己増殖系、計算機理論などの分野から研究なされているが、その興味の一つに初期値をランダムに与えたらどのような状態に落ちつくか、様々な増殖の法則によってどのような平衡状態がおきるかということがある。そこでパスカルの三角形の法則で初期値をランダム（一番上の段の値を乱数によって決定）にし、どのような傾向が見られるかのシミュレーションをしたのが図16である。すると部分的に規則的な逆三角形を含むが、全体としては無秩序な平面を得ることができる。なお、このようなパターンはある種の貝殻にも現れる（文献7によれば、ニシキマクラガイなどに見られる）ことが知られおり、パスカルの三角形の法則は自然のパターンとも関係がある。

4．パスカルの三角錐とその応用パターン

(1)パスカルの三角錐

ここではパスカルの三角形を三次元的に拡張してパスカルの三角錐という図形を考え、その断面に現れるパターンを論ずる。

パスカルの三角形では各段の位置は列で決定したが、ここで新たに〝行〟という概念を加える。段は高さを表すとし、行と列で各段の奥行きと左からの位置を考える。そして二項係数を拡張した三項係数によって二

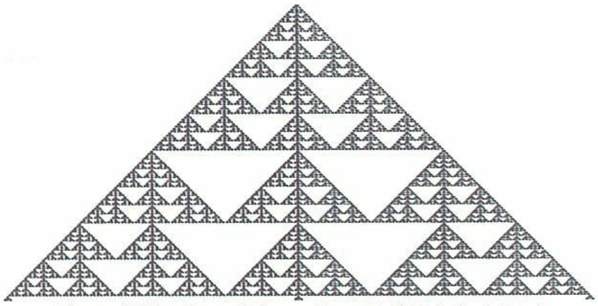


図15　法則$y^t(i)=y^{t-1}(i-1)+y^{t-1}(i)+y^{t-1}(i+1)$によるパターン

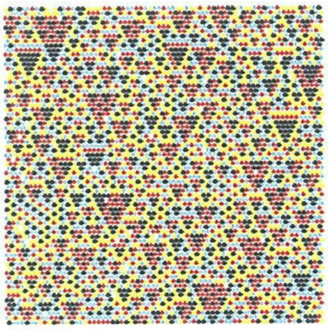


図16　ランダム初期値によるパターン
(128 による剰を更に 4 で割った剰りで彩色:
0…黒　1…黄　2…赤　3…水色)

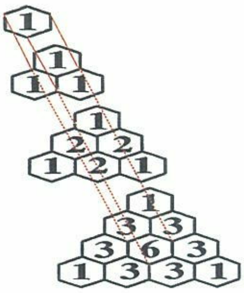
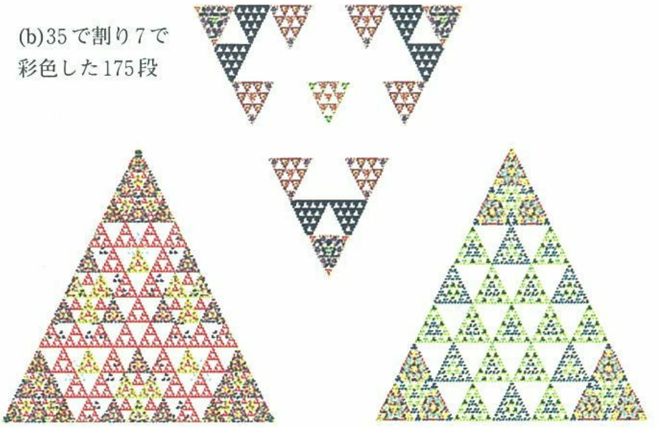


図17　パスカルの三角錐の概念



(b)35で割り7で彩色した175段

(a)144で割り7で彩色した176段　(c)25で割り7で彩色した175段

図20　パスカルの三角錐から得る様々なパターン
(0:黒　1:橙色　2:赤　3:緑　4:紫　5:青　6:水色　)

$$\frac{0!}{0!0!0!}$$

0段目

$$\frac{1!}{1!0!0!}$$
$$\frac{1!}{0!1!0!}\quad\frac{1!}{0!0!1!}$$

1段目

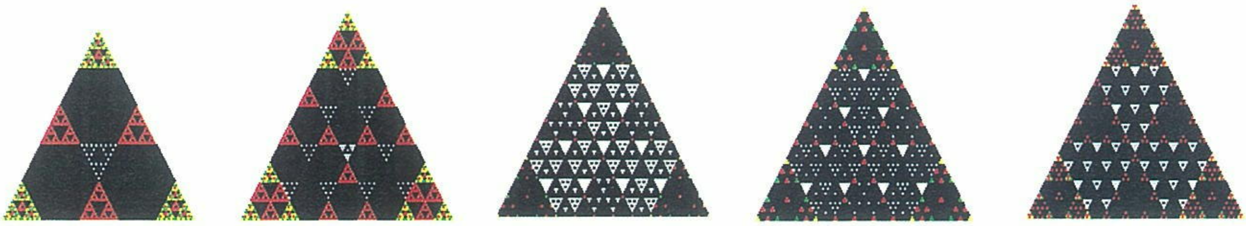
$$\frac{2!}{2!0!0!}$$
$$\frac{2!}{1!1!0!}\quad\frac{2!}{1!0!1!}$$
$$\frac{2!}{0!2!0!}\quad\frac{2!}{0!1!1!}\quad\frac{2!}{0!0!2!}$$

2段目

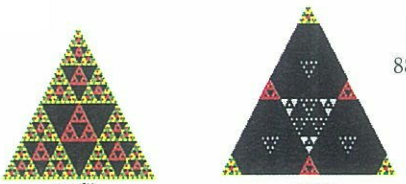
$$\frac{3!}{3!0!0!}$$
$$\frac{3!}{2!1!0!}\quad\frac{3!}{2!0!1!}$$
$$\frac{3!}{1!2!0!}\quad\frac{3!}{1!1!1!}\quad\frac{3!}{1!0!2!}$$
$$\frac{3!}{0!3!0!}\quad\frac{3!}{0!2!1!}\quad\frac{3!}{0!1!2!}\quad\frac{3!}{0!0!3!}$$

3段目

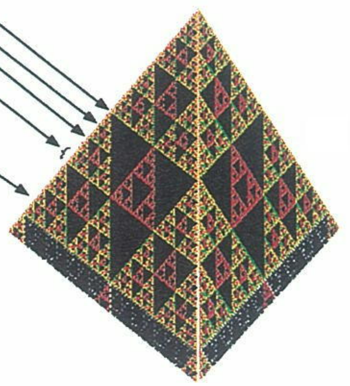
図18　三項係数によるパスカルの三角錐表示

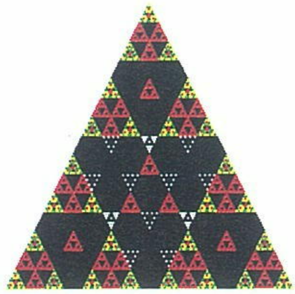


80段　88段　89段　90段　91段



64段　72段





120段

図19　パスカルの三角錐とその断面に現れるパターン
(128による剰りを更に4で割った剰りで彩色:0…黒　1:黄　2:…赤　3:…緑)

次元的に拡張して得る三角錐を定義する。ここで三項係数というのは、M 個のものから N1 個と N2 個それぞれ選び出す組み合わせの数を示す。

三項係数による三角錐は、パスカルの三角形と同様上段から下段への単純な足し算で作ることができる。すなわち図17のような互い違いになった六角格子を考え最上段に 1 をおくと、下段の各セルはそれが接している上段の三つのセルの和が入る。その理由はパスカルの三角形の場合と同じように考えて、

[M 個から N1 個と N2 個それぞれとる組み合わせ数]
＝[M－1 個から N1 個と N2 個とる組み合わせ数
　　(M 個目を選ばない場合)]
　＋[M－1 個から N2－1 個と N2 個それぞれとる組み合わせ数
　　(M 個目を最初に選ぶ数のうちとする場合)]
　＋[M－1 個から N1 個と N2－2 個それぞれとる組み合わせ数
　　(M 個目を後に選ぶ数のうちとする場合)]

という性質から導かれる。ここで、上から M 段目、奥から N1 行目、左から N2 列目は $(1+x+y)^M$ の $x^{N1}y^{N2}$ の係数を表す。三角錐を数式で表せば図18になり、一番奥を 0 行目とおくと、M 段 N1 行 N2 列は M!/(M-N1)!(N1-N2)!N2!（N1＝0, …, M；N2＝0, …, N1）となる。これをパスカルの三角錐と呼ぶことにする。

全ての係数は三項係数で定義されるのだからこの三角錐はパスカルの三角形のもっとも基本的な三次元的拡張といえる。図18の四段目から判るとおり、断面の周上は分母のどれかが 0 の階乗であり、すなわち三つに分けるうちの一つはとらない組み合わせ数になる。つまりパスカルの三角錐の表面には二項係数が現れる。パスカルの三角錐によって、その断面から様々なパターンを得ることができる。図19にパスカルの三角錐を図11と同じ法則で彩色した係数を、いくつかの断面のパターンと共に表示する。ここで第89段の大きな空白三角形は128で割りきれる数が一辺につき 6 個並んでいるわけだが、その内側に下段で表れる数値は割り切れる数を三つ足した数だから、やはり128で割り切れ空白のままである。故に89段から94段にかけて一辺 6 の空白三角錐が存在する。つまり、三角錐でも基本法則は三角形の時と全く同じである。

以上でわかるようにパスカルの三角錐の断面を切ることで無数のパターンを得る。またパスカルの三角形同様に、彩色の鍵となる数値を変更すれば様々な彩色による三角錐を得ることもできる。そこでその例を図20(a)～(c)に示す。図中で〝a で割り b で彩色〟というのは、数 a で割り切れない値をさらに数 b で割り、その剰りによって彩色したことを意味する。以降の図ではこの表記を使う。

なお、パスカルの三角錐を縦や斜めに切ることで、パターンの可能性は更に広がるだろう。また、この考え方を拡張し四項係数を用いれば〝パスカルの四次元三角錐〟を考えることもできる。ただし、パスカルの三角錐の表面がパスカルの三角形と同じだったのと同様に、パスカルの四次元三角錐の表面はパスカルの三角錐と等しくなる(四次元物体の表面は三次元である)ことを付記しておく。

⑵三次元セル・オートマトン

パスカルの三角錐は三次元セル・オートマトンによるパターンの一つと位置づけできる。上から下へ時間が経過すると考えそれを t と表し、時刻 t、n1 行 n2 列の数値を y^t (n1, n2) とおけば、その法則は、

$$y^t(n1, n2) = y^{t-1}(n1-1, n2-1) + y^{t-1}(n1-1, n2) + y^{t-1}(n1, n2)$$

とかける。

パスカルの三角形の拡張として、蜂の巣形格子ではなく図21のような正方形の格子を考えよう。すなわち各セルは上段の四つのセルと接するので、上段の四つのセルの値の合計として下の段の値を与える。すると

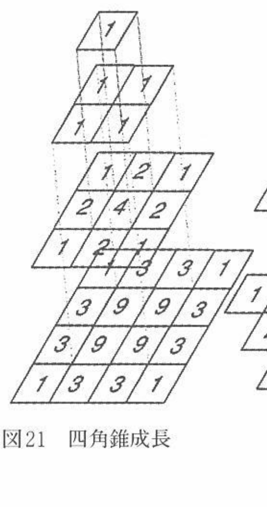


図21　四角錐成長

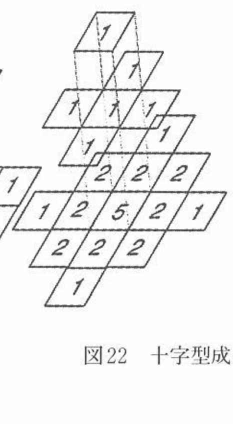
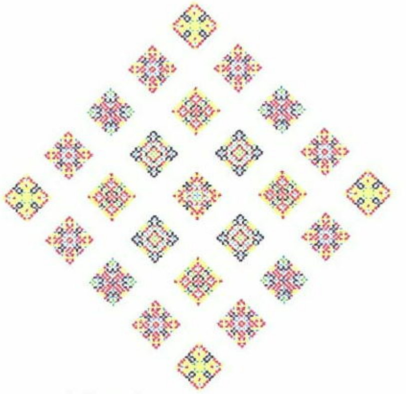
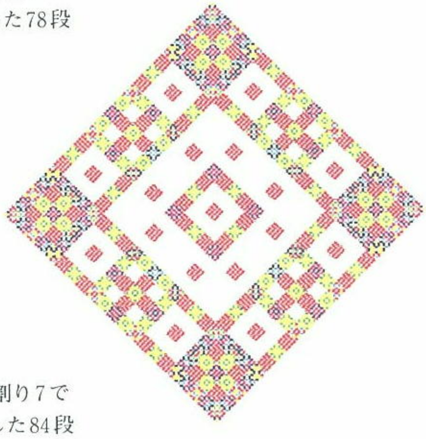


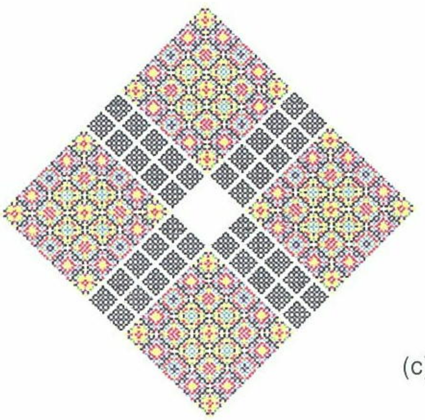
図22　十字型成長



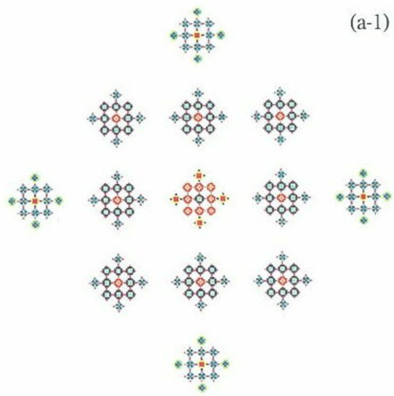
(a) 17で割り7で
彩色した78段



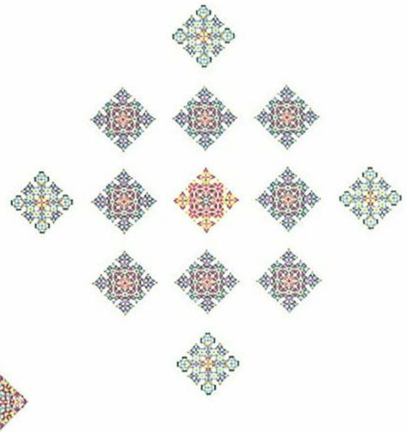
(b) 32で割り7で
彩色した84段



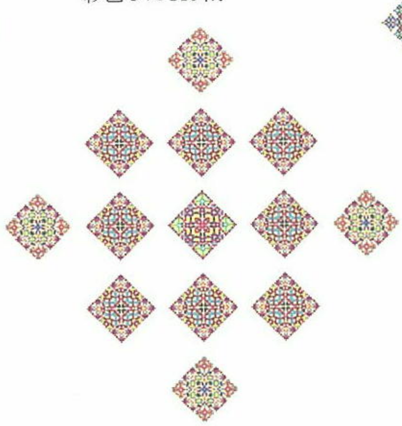
(c) 49で割り7で
彩色した83段



(a-1) 7で割り7で
彩色した116段

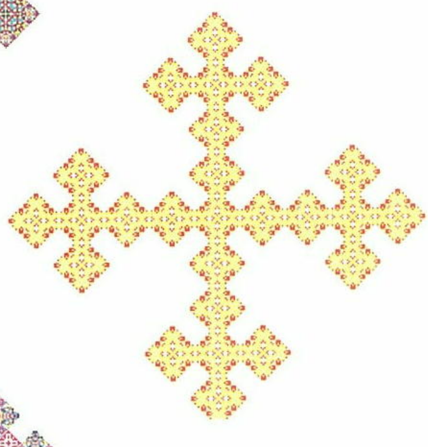


(a-2) 7で割り7で
彩色した118段

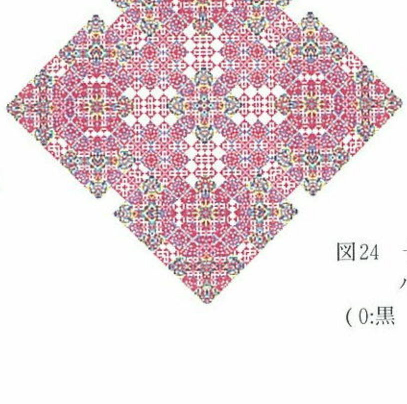


(a-3) 7で割り7で
彩色した119段

図23　四角錐成長によるパターン
(剰りに対して以下の色で彩色
0:黒　1:赤　3:緑　4:紫　5:青　6:水色)



(b) 3で割り3で
彩色した126段



(c) 8で割り8で
彩色した120段

図24　十字型成長による
パターン
(0:黒　1:黄　2:赤　3:緑　4:紫　5:青
6以上:水色)

その法則は、

$$y^{t}(n1,n2)=y^{t-1}(n1+1,n2)+y^{t-1}(n1-1,n2)+y^{t-1}(n1,n2-1)+y^{t-1}(n1,n2+1)$$

とかけ、今までと同様に最上段には値１のセルを一つおけば形は四角錐となる。パスカルの三角形と同様に、その表面はパスカルの三角形と等しくなる。この図形は第 N1 行 N2 列の値が[M 個から N1 個とる組み合わせ数]×[M 個から N2 個とる組み合わせ数]となる特徴を持つ。すなわち各行及び列は、端の行及び列の定数倍になる。これ四角錐成長と呼ぶことにする。

もう一つのパターンとして図21のパターンの四つのセルの中心に更にセルをおき、各段のセルは図22のように上段の五つのセルの合計として与えるパターンを考えることもできる。するとその法則は

$$y^{t}(n1,n2)=y^{t-1}(n1+1,n2)+y^{t-1}(n1-1,n2)+y^{t-1}(n1,n2)+y^{t-1}(n1,n2-1)+y^{t-1}(n1,n2+1)$$

とかける。この規則は N 項係数とは無関係であり、むしろ図15のセル・オートマトンの三次元的拡張とみなした方がよい。これによって得る形も四角錐だが、これを十字型成長と呼ぶことにする。

これらの成長法則からも無数のパターンを得ることができる。そこで、第一の彩色規則による例をいくつか見よう。まず四角錐成長で得る断面パターンを図23 (a) ～(c) に現す。次に十字型成長によるパターンを図24 (a) ～(c) に表す。これらの法則によるパターンからもフラクタル構造が見いだせる。

5．おわりに

本論文ではパスカルの三角形とその拡張であるパスカルの三角錐に焦点を当て、値に彩色して現れるパターンについて論じた。パスカルの三角形の意味は過去数百年に渡って深く研究されており、中途半端に説明しても先人に失礼になるので、数学的な説明はできるだけ割愛し最低限とした。

パスカルの三角形は順列・組み合わせやフラクタルに関する書籍で必ずといってよいほど登場するが、確率論やセル・オートマトンに関する深い議論への過程で取り上げられるだけで、三角形そのものを深く議論している書籍は少ないように思う。また、このような図形の彩色は、近年のコンピュータとその GUI の進歩によって可能になったわけで、ここでもう一度見直し、芸術も含めた見地でもう一度見直すのも価値があるのではと思い、今回まとめた次第である。

また、三角形のパターンも四角形のパターンも平面を簡単に埋めることができるので、これらのパターンはタイルのデザインやテキスタイルデザインなどに利用価値があるのではないかと考えている。

本研究で扱う演算は足し算とわり算のみで十分である。もちろん各係数の意味を理解するためには階乗が必要だが、上の段から順に計算していく過程では掛け算は必要ない。パスカルの三角形は非常に手軽なパターン作成方法と思う。

この研究はコンピュータ言語演習とチュートリアルの準備を発端とした。プログラムが簡単に組めるので学生向きに格好な課題と思ったわけだが、作ってみて非常に美しいと感じた。そこでより美しいパターンをパスカルの三角形の周りで探しているうちに三次元のパターンを発案した。三次元図形の魅力は、角錐の断面から無数にパターンを得ることにあると思う。

前段で〝美しい〟という言葉を使ったが、図形が美しいかどうかは人それぞれで育った環境などに大きく関係する。この意味で、この論文そのものも普遍的であるかまだ疑問がある。この議論は認知科学などの領域にも属する問題であり、この点もふまえてこれら図形をどう発展させていくかゆっくり考えていきたいと思っている。また、筆者は芸術、数学ともに専門家ではないので、レビューに不足があるかもしれない。関連した研究をご存じの方や、この意味・可能性についてご意見を頂けたら有り難いと思っている。

謝辞

本論文をまとめるにあたり、貴重なコメントを下さった東北芸術工科大学情報デザイン学科教授端山貢明先生、生産デザイン学科教授渥美浩章先生に深く感謝いたします。

参考文献

1） 相沢洋二 (1986)「セル・オートマトンに生じるパターン」別冊数理科学：形・フラクタル．pp.133-139

2） 小川泰 (1989)『フラクタルとはなにか』, New Science Age 39．岩波書店

3） 左口七朗（1977）『パターンデザイン』, ダヴィット社
4） 芹沢浩（1993）『フラクタル紀行』, 森北出版
5） 伏見康治　他（1979）『美の幾何学』中公新書554．中央公論社
6） Jhon P. Frisby；村山久美子訳（1985）：『SEEING　錯視—脳と心のメカニズム』, 誠信書房
7） 平凡社世界大百科事典（1988）　第4巻．平凡社

補足：プログラムを組むときの注意

＊1　アルゴリズムは単純だが、数十段以上の計算を行うと、値が非常に大きくなりコンピュータ上での桁があふれ、エラーになる。そこで先に割る数を決め、その剰りで上の段から下へ計算すればよい。なお、階乗を用いる一般項の式によるより、上から下への足し算による方が容易にプログラムできる。

＊2　角錐では各面全体を記憶して下の段への計算を進めなくてはいけない。大きな面を計算しようとすると、すぐ配列変数があふれてしまうので、各図形が対称なことを利用し、無駄が無いように計算したらよい。